المعادلات التفاضلية ذات الرتب العالية:

* المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

وهي معادلة من الشكل التالي: $F(x,y,y',y'')=0$

سندرس منها المعادلات التي يمكن تخفيضها رتبتها.

1) المعادلة التفاضلية التي لا تحوي الدالة y:

من الشكل: $F(x,y',y'')=0$ [1]

لنفرض $y'=p \Rightarrow y''=p'$

فتصبح المعادلة [1] على الشكل التالي:

$F(x,p,p')=0$ [2]

معادلة من الرتبة الأولى في p، وهذه المعادلة درسناها سابقا.

وبحل هذه المعادلة نجد حلها العام على الشكل:

$\phi(x,p,c_1)=0$ [3]

نحلها بالنسبة إلى p وهي من الشكل:

$p=\varphi(x,c_1)$

بمكاملة الطرفين نعوض p فيها بما يساويها

$\int y' = \int \varphi(x,c_1)\,dx$

$y=\int \varphi(x,c_1)\,dx + c_2$

ملاحظة: الآن وإذا أمكن كتابة الحل العام [3] على الشكل (أي محلولة بالنسبة إلى x): $x=\psi(p,c_1)$

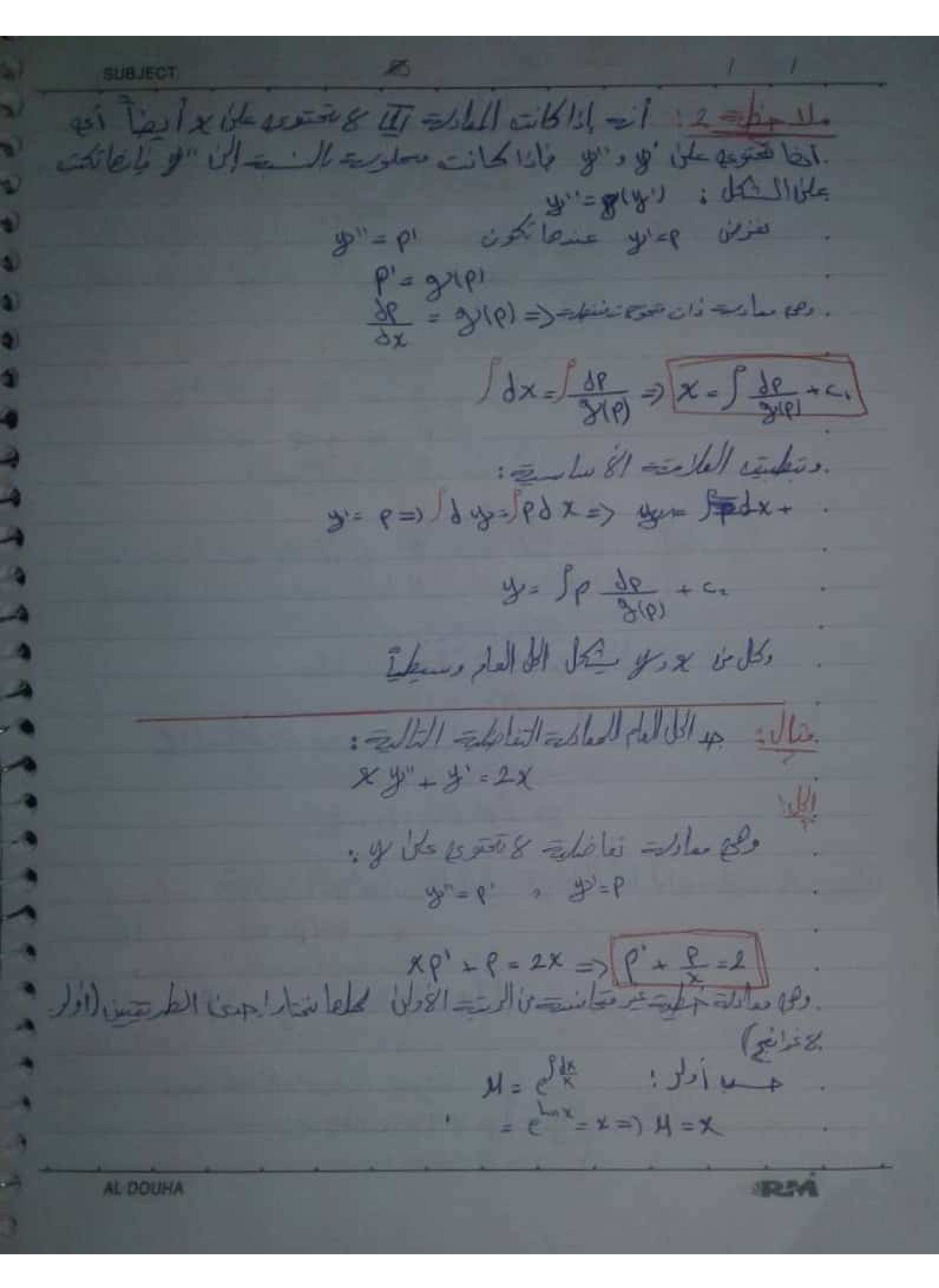
وتطبيق العلاقة الأساسية:

$y'=p \Rightarrow \int dy=\int p\,dx \Rightarrow y=\int p\,dx$

ومفاضلة x وتعويضها ينتج لنا:

$$\begin{cases} y=\int p\,\psi'(p,c_1)\,dp+c_2 \\ x=\psi(p,c_1) \end{cases}$$

وهو الحل العام وسيطيا.



ملاحظة 2: أ- إذا كانت المعادلة III لا تحتوي على x أيضاً أي أنها تحتوي على y' و y'' فإذا كانت محلولة بالنسبة إلى y'' أو كانت على الشكل:

$y''=g(y')$

نفرض $p=y'$ عندما يكون $y''=p'$

$p'=g(p)$

$\frac{dp}{dx}=g(p) \Rightarrow$ وهي معادلة ذات متحولات منفصلة

$$\int dx=\int \frac{dp}{g(p)} \Rightarrow x=\int \frac{dp}{g(p)}+c_1$$

وبتطبيق العلاقة الأساسية:

$y'=p \Rightarrow \int dy=\int p\,dx \Rightarrow y=\int p\,dx+$

$$y=\int p\frac{dp}{g(p)}+c_2$$

وكل من x و y يشكل الحل العام وسيطياً

مثال: جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$xy''+y'=2x$

الحل:

وهي معادلة تفاضلية لا تحتوي على y:

$y''=p'$, $y'=p$

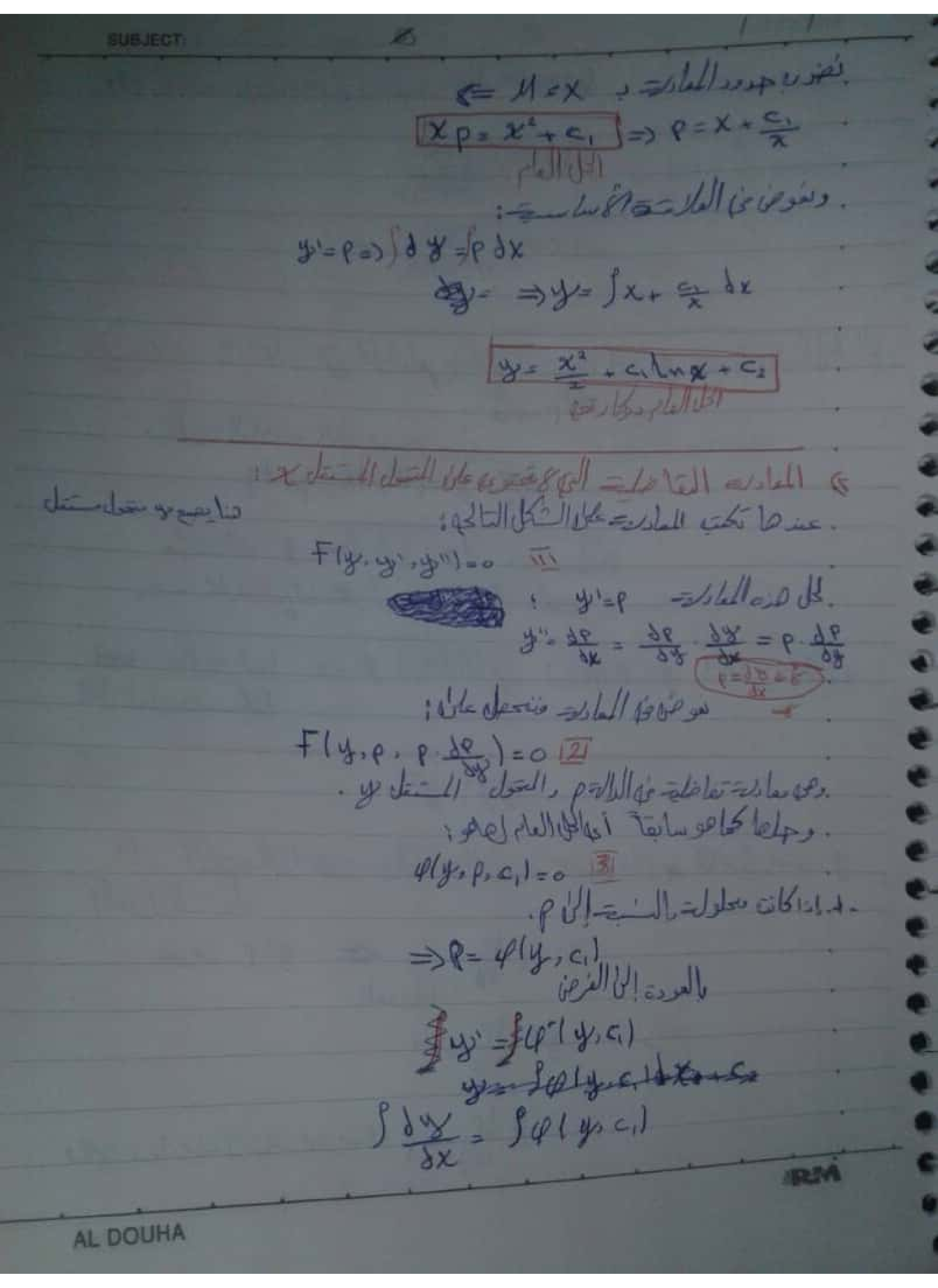
$xp'+p=2x \Rightarrow p'+\frac{p}{x}=2$

وهي معادلة خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى لحلها نختار إحدى الطريقتين (أولر، لاغرانج)

حسب أولر:

$\mu=e^{\int \frac{dx}{x}}$

$=e^{\ln x}=x \Rightarrow \mu=x$



بتعويض حدود المعادلة ب $M = x$ ⇐

$xp = x^2 + c_1 \Rightarrow p = x + \frac{c_1}{x}$

الحل العام

ونعوض في العلاقة الأساسية:

$y' = p \Rightarrow \int dy = \int p\, dx$

$\Rightarrow y = \int x + \frac{c_1}{x}\, dx$

$y = \frac{x^2}{2} + c_1 \ln x + c_2$

الحل العام للمعادلة

---

٤) المعادلة التفاضلية التي لا تحتوي على المتحول المستقل x:

ما يصبح y متحول مستقل

عندها تكتب المعادلة على الشكل التالي:

$F(y, y', y'') = 0$ [1]

لحل هذه المعادلة: $y' = p$

$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$

($p = \frac{dy}{dx}$ [illegible])

نعوض في المعادلة فنحصل على:

$F(y, p, p\frac{dp}{dy}) = 0$ [2]

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة p، المتحول المستقل y.

وحلها كما هو سابقاً أي الحل العام لها هو:

$\varphi(y, p, c_1) = 0$ [3]

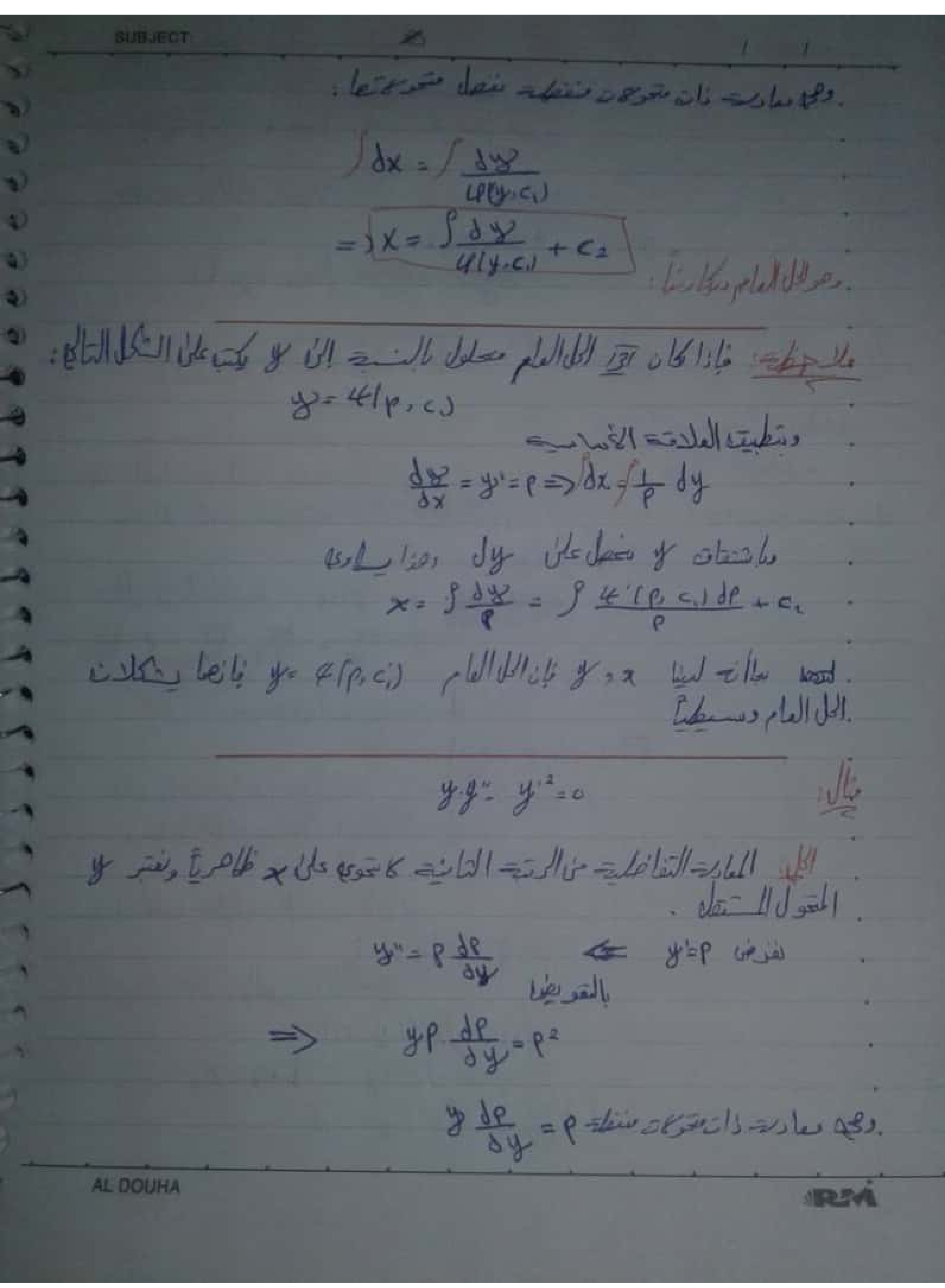
- إذا كانت محلولة بالنسبة إلى p.

$\Rightarrow p = \varphi(y, c_1)$

بالعودة إلى الفرض

$\int y' = \int \varphi(y, c_1)$

$\int \frac{dy}{dx} = \int \varphi(y, c_1)$



وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة نفصل متغيراتها:

$$\int dx = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)}$$

$$\Rightarrow x = \int \frac{dy}{\varphi(y, c_1)} + c_2$$

وهو الحل العام بتكاملها.

ملاحظة: فإذا كان آخر الحل العام محلول بالنسبة إلى y يكتب على الشكل التالي:

$$y = \varphi(p, c_1)$$

وبتطبيق العلاقة الأساسية

$$\frac{dy}{dx} = y' = p \Rightarrow \int dx = \int \frac{1}{p}\, dy$$

وباشتقاق y نحصل على dy وهذا يساوي

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{\varphi'(p, c_1)\, dp}{p} + c_2$$

وهذه معادلة لدينا x و y بأن الحل العام $y = \varphi(p, c_1)$ بأنهما يشكلان الحل العام وسيطياً.

مثال:

$$y y'' - y'^2 = 0$$

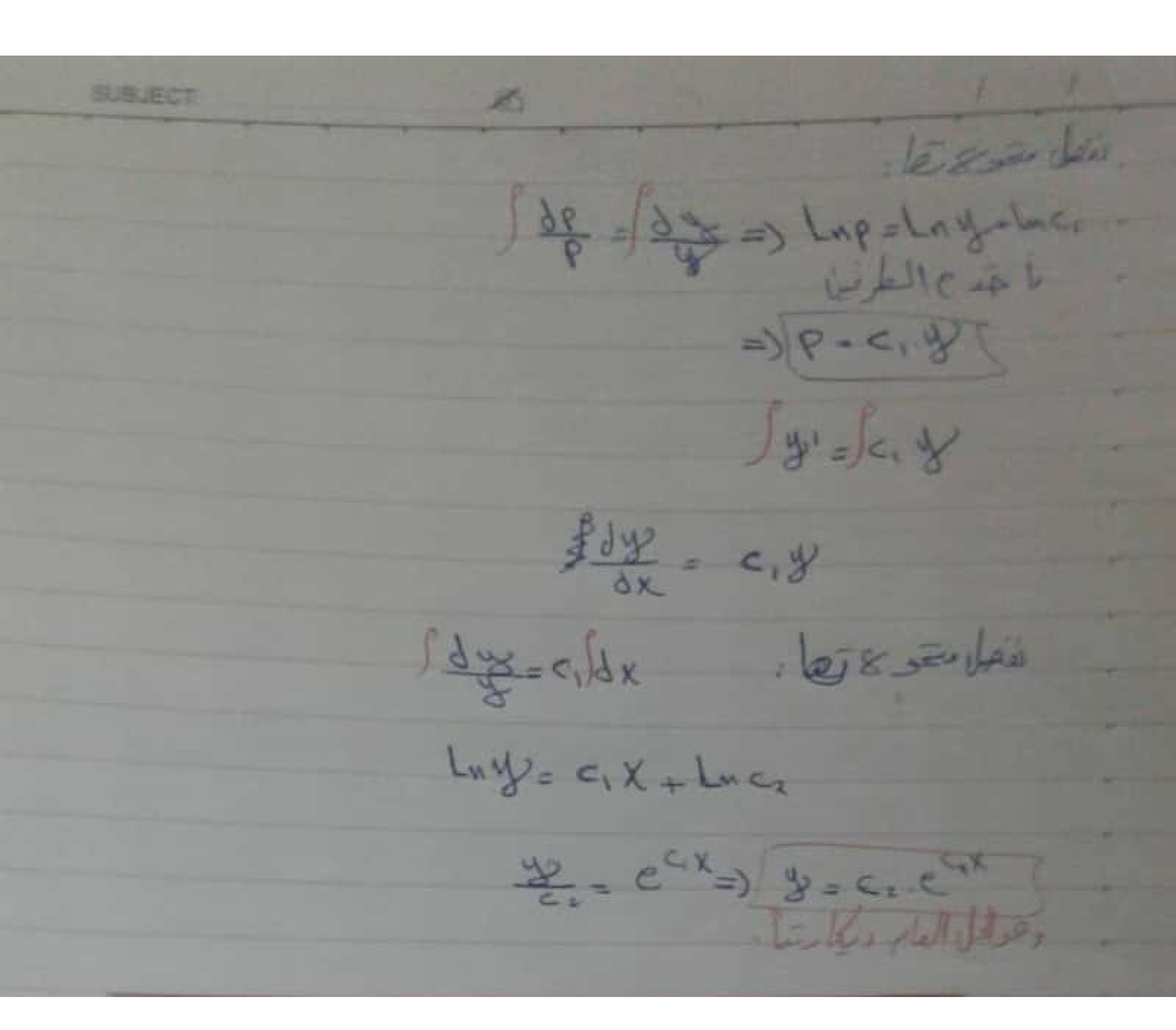
الحل: المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لا تحوي على x ظاهرياً ونعتبر y المتحول المستقل.

نفرض $y' = p$ ⇐ $y'' = p\frac{dp}{dy}$

بالتعويض

$$\Rightarrow y p \frac{dp}{dy} = p^2$$

وهي معادلة ذات متغيرات منفصلة $y \frac{dp}{dy} = p$


SUBJECT

نفصل متغيراتها:

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = \ln y + \ln c_1$$

أخذ e الطرفين

$$\Rightarrow \boxed{p = c_1 y}$$

$$\int y' = \int c_1 y$$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 y$$

نفصل متغيراتها:

$$\int \frac{dy}{y} = c_1 \int dx$$

$$\ln y = c_1 x + \ln c_2$$

$$\frac{y}{c_2} = e^{c_1 x} \Rightarrow \boxed{y = c_2 \cdot e^{c_1 x}}$$

وهو الحل العام ديكارتيا